



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: _____

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 06 / 05 / 2021

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- Η f συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

(Μονάδες 6)

A2. Να δώσετε τον ορισμό της εξίσωσης εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο της $(x_0, f(x_0))$

(Μονάδες 5)

A3. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

i. Είναι κατά την γνώμη σας σωστός ή λάθος ο παραπάνω ισχυρισμός;

(Μονάδα 1)

ii. Να αιτολογήσετε πλήρως την απάντηση που δώσατε στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 3)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

- ii. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .
- iii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = +\infty$
- iv. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.
- v. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

- B1.** Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 7)
- B2.** Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η συνάρτηση έχει τρία σημεία καμπής, δύο από τα οποία είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο. (Μονάδες 6)
- B3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f . (Μονάδες 5)
- B4.** Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f . (Μονάδες 3)
- B5.** Να λυθεί η εξίσωση $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}, x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$. (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x=0 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και στη συνέχεια ότι είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 7)

Γ2. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

- i. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = \frac{1}{2}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωσή $2f'(x) = 1$ έχει ακριβώς μια λύση την $x=0$.
- iii. Ένα υλικό σημείο M ξεκινάει την χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 < 0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης της f με $x \geq x_0$ και $t \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του, αν υποθεθεί ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης είναι θετικός για κάθε $t \geq 0$.

(Μονάδες 3+3+5)

Γ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2(x - 2)^2$, $x \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μια θέση τοπικού μεγίστου.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f(x) = e^x - \alpha x^2 - \beta x$, $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι:

- $e^{\beta x} + x^2 + \alpha x \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\beta x^3 + 2\alpha + 1}{3(x^2 - 1)} = \frac{1}{2}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $\alpha = -1, \beta = 1$.

(Μονάδες 6)

Δ2. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 3)

Δ3. Να δείξετε ότι από το σημείο $O(0,0)$ άγονται δύο ακριβώς δύο εφαπτόμενες προς τη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 5)

Δ4. Να δείξετε ότι είναι καλώς ορισμένο και να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f^2(x) - f(x) + 1} - 1}{\ln(f(x))^{f(x)} + 2f(x)}$.

(Μονάδες 5)

Δ5. Να λυθεί η ανίσωση $x^{\ln x} + \ln^4 x > e + \ln^2 x$.

(Μονάδες 3)

Δ6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x-\alpha} + \frac{f(x)}{x-\beta} = 2$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$.

(Μονάδες 3)